

# Städtisches Labenwolf-Gymnasium Nürnberg

Kollegstufenjahrgang 2003/2005

Schuljahr 2004/2005

## FACHARBEIT

aus dem Fach

## Physik

**Thema:** Rotation starrer Körper: Physik des Kreisels

Verfasser: Fabian Schuh  
Leistungskurs: Physik (LK P2)  
Kursleiter: Herr Dr. Nees  
Abgabetermin: 28. Januar 2005

Erzielte Note: \_\_\_\_\_ in Worten: \_\_\_\_\_  
Erzielte Punkte: \_\_\_\_\_ in Worten: \_\_\_\_\_  
(einfache Wertung)

Abgegeben am: \_\_\_\_\_ (Vom Kursleiter auszufüllen)

.....  
(Unterschrift des Kursleiters)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Themenschwerpunkt</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Beschreibung rotierender Körper</b>	<b>3</b>
2.1	Translation und Rotation	3
2.2	Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung	4
2.3	Das Trägheitsmoment	5
2.3.1	allgemeines Trägheitsprinzip	5
2.3.2	Trägheitsmoment eines Massepunkts	6
2.3.3	Trägheitsmoment eines starren Körpers	6
2.3.4	Der <i>Steinersche Satz</i>	9
2.4	Die gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung und das Drehmoment	10
2.5	Der Drehimpuls und seine Erhaltung	11
2.6	Direkter Vergleich zwischen Translation und Rotation	13
<b>3</b>	<b>Der symmetrische Kreisel</b>	<b>14</b>
3.1	Definition eines symmetrischen Kreisels	15
3.2	Der kräftefreie symmetrische Kreisel	16
3.2.1	Definition des kräftefreien Kreisels	16
3.2.2	Unabhängigkeit der Drehbewegung	16
3.2.3	Die Stabilität der permanenten Achsen	17
3.2.4	Die Nutation des kräftefreien Kreisels	18
3.3	Der schwere Kreisel	20
3.3.1	Definition des schweren Kreisels	20
3.3.2	Präzession eines schweren Kreisels	20
3.3.3	Das Kreiselmoment $M_K$	22
3.3.4	Der besondere Fall mit $\varphi = 90^\circ$	23
3.4	Die pseudoreguläre Präzession	24
<b>4</b>	<b>Anwendungsgebiete der Kreiselphysik</b>	<b>25</b>
4.1	Der Kreiselkompass	25
4.2	Präzessionsbewegung der Erde	26
<b>5</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>28</b>
6.1	Literaturnachweis	28
6.2	Quellen der Bilder	29
6.3	Inhalt der beiliegenden CD-ROM	29
6.4	Erklärung und Einverständniserklärung	30

# 1 Einleitung und Themenschwerpunkt

Mit dem Begriff Kreisel verbindet man im Allgemeinen zuerst ein sich drehendes Spielzeug für Kinder. Das hinter einer solchen Rotation durchaus komplexe Vorgänge ablaufen können, erkennt man, sobald die Kreiselbewegung zu *schlingern* beginnt und die Gesamtbewegung eher an einen Kegel erinnert. Diese Bewegung und weitere Eigenschaften eines Kreisels werden nun etwas genauer dargelegt.

Diese Facharbeit beginnt mit einem Grundlagenteil, um die geltenden physikalischen Gesetze zu erläutern. Der darauf folgende Teil behandelt die Drehbewegung des symmetrische Kreisels und deren Anwendungsmöglichkeiten und Erscheinungen.

## 2 Physikalische Beschreibung rotierender Körper

Zu Beginn sollen zunächst die Begriffe *Rotation*, *Drehgeschwindigkeit*, *Drehmoment*, *Trägheitsmoment* und *Drehimpuls* dargelegt und erläutert werden, da diese für die anschließende Behandlung des Kreisels benötigt werden.

### 2.1 Translation und Rotation

Die Begriffe *Translation* und *Rotation* beziehen sich beide auf starre Körper, d.h. auf Körper, die in ihrer Form auch bei schnellen Drehbewegungen gleich bleiben oder lediglich vernachlässigbare Formänderungen vollziehen und dessen Einzelteile immer die gleiche Lage zueinander behalten<sup>1</sup>.

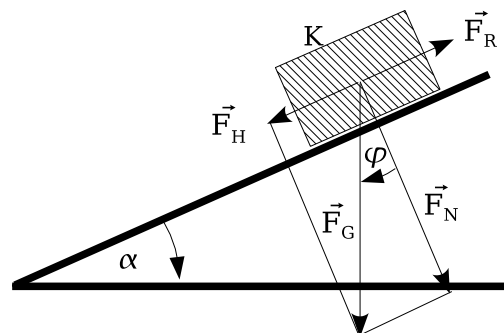


Abbildung 1: Translation an einer schiefen Ebene

Ein Körper beschreibt eine **Translation**, wenn ein gerader Strich (etwa ein Lineal) während seiner gesamten Bewegung parallel zur Ausgangslage bleibt. In anderen Worten bezeichnet eine Translation eine Verschiebung in eine einzige Richtung. Ein

<sup>1</sup>vgl: Quelle 5 S. 71: 4.1 Die Schiebung (Translation)

Beispiel dafür wäre das Verschieben eines Regals oder einer Kiste (Abbildung 1).

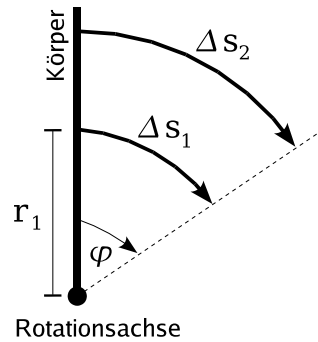


Abbildung 2: Rotation um eine feste Achse

Eine **Rotation** hingegen zwingt alle Teile eines starren Körpers eine Kreisbahn um die Rotationsachse zu vollziehen. Diese Massenpunkte bilden somit konzentrische Kreise mit unterschiedlichen Radien zur Achse, was bedeutet, dass sich die Teilchen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit bewegen. Der Unterschied zur

allgemeinen Translation liegt darin, dass diese Teilchen eine Verschiebung auf einer kreisförmigen Bahn beschreiben<sup>2</sup>. In Skizze 2 erkennt man, wie sich ein Körper, etwa eine Kiste, mit einem Winkel  $\varphi$  um eine ortsfeste Rotationsachse dreht. Die zurückgelegte Wegstrecke eines einzelnen Punktes ist dabei abhängig von der Entfernung zur Drehachse und lässt sich mit

$$\Delta s_1 = r_1 \cdot \varphi \quad (2.1)$$

berechnen.

## 2.2 Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist die Änderung des Winkels  $\varphi$  in der Zeit  $t$ . Somit ist die Winkelgeschwindigkeit definiert als<sup>3</sup>:

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = 2\pi \cdot f \quad (2.2)$$

Man könnte sagen, es ist die Geschwindigkeit mit der sich der Körper dreht. Die Bewegung, die jedes einzelne Teilchen beschreibt, liegt, wie bereits erwähnt, auf einer Kreisbahn mit der Entfernung  $r$  zur Drehachse. Mit Formel 2.1 ergibt sich für die Geschwindigkeit des Teilchens also<sup>4</sup>:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = \omega \cdot r \quad (2.3)$$

<sup>2</sup>vgl: Quelle 5 S. 71: 4.2 Die Drehung (Rotation)

<sup>3</sup>Quelle 6 S. 304: 10.1 Grundlagen

<sup>4</sup>Quelle 12 S. 19: M7 Einfache krummlinige Bewegungen

Da es sich bei der Drehung durchaus auch um eine beschleunigte Rotation, bedingt durch Reibung oder Herabrollen an einer schiefen Ebene, handeln kann, muss nun die Beschleunigung mitbetrachtet werden. Dazu wird die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  aus dem Quotienten der Änderung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und dem Zeitintervall  $\Delta t$  gebildet<sup>5</sup>:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (2.4)$$

$$[\alpha] = \frac{1}{s^2}$$

Zur Berechnung der Momentanbeschleunigung bedient man sich des Limes:

$$\alpha_{\text{momentan}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Für die Beschleunigung  $a$  eines Massepunkts im Abstand  $r$  zur Drehachse ergibt sich:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\omega}{\Delta t} = r \cdot \alpha \quad (2.6)$$

Natürlich gilt auch bei der Rotation der Satz der kinetischen Energie<sup>6</sup>:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \quad (2.7)$$

Letztendlich ergibt sich aus den Formeln 2.3 und 2.7 für die Energie<sup>7</sup>:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} (m \cdot r^2) \omega^2 \quad (2.8)$$

## 2.3 Das Trägheitsmoment

### 2.3.1 allgemeines Trägheitsprinzip

Versucht man einen Körper durch Translation zu verschieben, wirkt dieser *träge*. Die Trägheit, die jeder Körper besitzt, sobald er eine Masse hat, wirkt der Änderung seines Bewegungszustandes entgegen. Das erste Newtonsche Axiom (Lex Prima) bezeichnet dieses Trägheitsprinzip<sup>8</sup>:

<sup>5</sup>Quelle 6 S. 304: 10.2.1 Das Drehmoment

<sup>6</sup>Quelle 12 S.14: M5 Erhaltungssätze

<sup>7</sup>vgl: Quelle 2 S. 131f: 2.6.4 Das Trägheitsmoment

<sup>8</sup>Quelle 16 Wikipedia - Die freie Enzyklopädie - Newton Axiome

*Ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte wirken, verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung.*

Für eine reine Translation wäre die nötige Kraft demnach  $F = m \cdot a$ . Bei einer Rotation ist das Ganze nun nicht mehr so leicht, da die Kräfte aufgrund des Drehmoments mit unterschiedlicher Wirkung am Körper angreifen. Um auch bei einer Rotation eine Trägheit definieren zu können wurde das *Trägheitsmoment* eingeführt.

### 2.3.2 Trägheitsmoment eines Massepunkts

Das Trägheitsmoment, auch Drehmasse oder Massenträgheitsmoment, wird definiert aus Formel 2.8 <sup>9</sup>:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} (m \cdot r^2) \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot J \omega^2 \quad (2.9)$$

$$J = m \cdot r^2 \quad (2.10)$$

$$[J] = 1 \text{kgm}^2$$

Auf einen Punkte gebracht<sup>10</sup>:

*Wenn ein Massepunkt mit der Masse  $m$  im Abstand  $r$  um eine feste Achse rotiert, so hat er das Trägheitsmoment  $J = m \cdot r^2$  und die Rotationsenergie  $W_{rot} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$ . Die abgeleitete Einheit des Trägheitsmomentes ist das Kilogramm mal Quadratmeter. 1 Kilogramm mal Quadratmeter ist gleich dem Trägheitsmoment, das ein Massenpunkt mit der Masse 1kg besitzt der im Abstand 1m um eine feste Drehachse rotiert.*

### 2.3.3 Trägheitsmoment eines starren Körpers

Wie man sich leicht vorstellen kann, befinden sich innerhalb eines starren Körpers, wie etwa eines Zylinders, viele verschiedene Massepunkte, die alle einen unterschiedlichen

---

<sup>9</sup>vgl: Quelle 2 S.131: 2.6.4 Das Trägheitsmoment und Quelle 6 S. 310: 10.2.2 Das Trägheitsmoment

<sup>10</sup>Zitiert von Quelle 2 S.131 und S.132

Abstand zur Rotationsachse einnehmen. Um auch für solche Körper ein Trägheitsmoment berechnen zu können muss die Formel 2.10 nun erweitert werden.

Tatsächlich ist das nicht sonderlich schwer, da man sich lediglich alle einzelnen Trägheitsmomente der  $n$  Teilchen summiert denken muss, um das gesamte Trägheitsmoment zu erhalten. Demnach gilt<sup>11</sup>:

$$J = (m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + \dots + m_n \cdot r_n^2) = \sum_{z=1}^n m_z r_z^2 \quad (2.11)$$

Es wird also jede Teilmasse mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Drehachse gewichtet. Im Fall einer kontinuierlichen Massenverteilung (ausgedehnter Körper) wird die Summe durch das Integral ersetzt:

$$J = \int r^2 dm \quad (2.12)$$

Somit ergibt sich für die Rotationsenergie eines starren Körpers<sup>12</sup>

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{z=1}^n m_z r_z^2 \implies E_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm \quad (2.13)$$

Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders kann über die Trägheitsmomente seiner Teilzylinder mit der Dicke  $\Delta r$  im Radius  $r$  und der Höhe  $h$  berechnet werden (Dichte sei  $\rho$ )<sup>13</sup>:

$$J = m \cdot r^2 = \rho V \cdot r^2 = \rho \cdot 2\pi r h \Delta r \cdot r^2 \quad (2.14)$$

Integriert man über alle möglichen Radien  $r = 0$  bis  $r = R$  so ergibt sich aus 2.14:

$$J = \int_0^R 2\pi \rho h r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4 \quad (2.15)$$

Da die Masse des Vollzylinders  $m = \rho \cdot V = \rho \pi h R^2$  ist<sup>14</sup>, gilt also für den Vollzylinder ein Trägheitsmoment:

$$J = \frac{1}{2} m R^2 \quad (2.16)$$

Weitere wichtige Trägheitsmomente<sup>15</sup>:

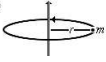
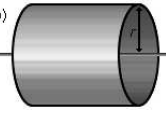
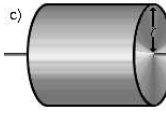
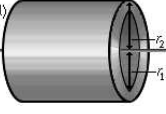
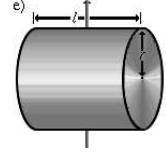
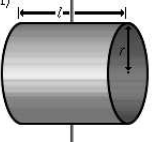
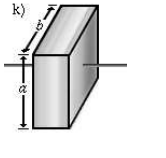
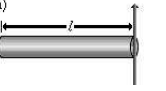
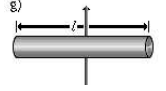
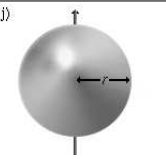
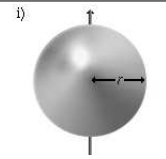
<sup>11</sup>Quelle 4 S. 108f: 6.2 Trägheitsmomente

<sup>12</sup>Quelle 2 S. 132: 2.6.4 Das Trägheitsmoment

<sup>13</sup>Quelle 2 S. 72: 1.4.2 Trägheitsmoment und Rotationsenergie

<sup>14</sup>Quelle 11 S. 34: Stereometrie

<sup>15</sup>Bilder und Inhalt aus Quelle 17 Wikipedia - Die freie Enzyklopädie - Trägheitsmoment

a) 	Punktmasse: $J = m \cdot r^2$		
b) 	Zylindermantel: $J = m \cdot r^2$	c) 	Vollzylinder: $J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
d) 	Hohlzylinder: $J = \frac{1}{2} m \cdot (r_2^2 + r_1^2)$	e) 	Vollzylinder: $J = \frac{1}{4} m \cdot r^2 + \frac{1}{12} m \cdot l^2$
f) 	Zylindermantel: $J = \frac{1}{2} m \cdot r^2 + \frac{2}{12} m \cdot l^2$	k) 	Quader: $J = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$
h) 	Stab: $J = \frac{1}{3} m \cdot l^2$	g) 	Stab: $J = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
i) 	Kugelschale: $J = \frac{2}{3} m \cdot r^2$	j) 	massive Kugel: $J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$

Es ist zu verdeutlichen, dass im Unterschied zu anderen Eigenschaften eines Körpers, wie der Masse, das Trägheitsmoment nicht fest ist. Ein Körper kann daher bei gleichbleibender Masse je nach der Lage der Drehachse unterschiedliche Trägheitsmomente haben<sup>16</sup>.

Von besonderem Interesse sind all jene Drehachsen, die durch den Schwerpunkt des Körpers gehen. Man stellt fest, dass für einen beliebigen Körper genau zwei Drehachsen existieren, an dem das Trägheitsmoment ein Maximum und ein Minimum beträgt. Diese beiden Achsen, zusammen mit einer dritten, an dem ein mittleres Trägheitsmoment herrscht, stehen aufeinander senkrecht und werden als **Hauptträgheitsachsen** des Körpers bezeichnet<sup>17</sup>.

<sup>16</sup>vgl: Quelle 2 S. 133: 2.6.4 Das Trägheitsmoment

<sup>17</sup>Quelle 8 S. 57 3. Die Stabilität der permanenten Achsen

### 2.3.4 Der Steinersche Satz

Der *Steinersche Satz* ist für die Behandlung des symmetrischen Kreisels nicht nötig und wird nur der Vollständigkeit halber hier erwähnt.

Bisher wurde immer angenommen, dass die Achse, um die wir einen Rotationskörper drehen, mit der geometrischen Achse des Körpers zusammenfällt. Nehmen wir nun jedoch einen Quader, so kann man als Drehachse neben der Symmetrieachse auch beliebige andere Achsen verwenden, selbst solche, die ausserhalb des Quaders liegen (siehe dazu Abbildung 3). Der *Satz des Steiner* bezieht sich nun auf all jene Rotationsachsen,

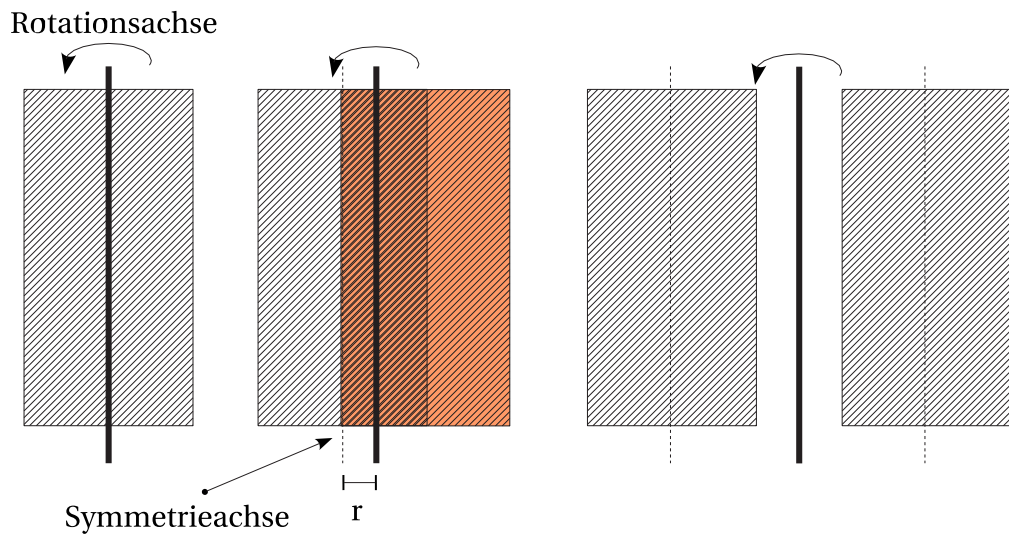


Abbildung 3: Rotationsachsen auch ausserhalb der Symmetrieachse

die **parallel** zur Figurenachse liegen. Er ist wie folgt definiert<sup>18</sup>:

$$J = J_0 + m \cdot r^2 \quad (2.17)$$

Dabei ist  $r$  der Abstand der Drehachse zur parallelen Figurenachse.

*Das Trägheitsmoment eines Körpers, bezogen auf eine zur Schwerachse parallele Achse, ist gleich dem Trägheitsmoment, bezogen auf die Schwerachse, zuzüglich dem Produkt aus Masse und Quadrat des Achsabstandes<sup>19</sup>.*

<sup>18</sup>vgl: Quelle 18 Wikipedia - Die freie Enzyklopädie - Steinerscher Satz

<sup>19</sup>zitiert aus Quelle 7 S. 340: 8.3.2.3 Der Satz von Steiner (Verschiebungssatz)

## 2.4 Die gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung und das Drehmoment

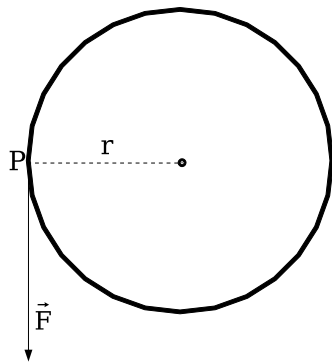


Abbildung 4: die beschleunigte Bewegung an einer Fadenrolle

Eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung lässt sich am einfachsten an einer Fadenrolle beschreiben (Abbildung 4). Zerrt eine Kraft  $\vec{F}$  an einen Punkt P ausserhalb der Drehachse, so rollt sich die Fadenrolle auf. Wirkt diese Kraft nun ständig, wird die Drehbewegung gleichmäßig beschleunigt<sup>20</sup>.

Der Drehmoment ist nun wie folgt definiert<sup>21</sup>:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (2.18)$$

Es ergibt sich also ein Rechtssystem bei dem drei Vektoren, nämlich Kraft, Kraftarm und Drehmoment, aufeinander senkrecht stehen. Schließen Arm und Kraft einen Winkel  $\varphi$  ein, so gilt<sup>21</sup>:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \varphi \quad (2.19)$$

Diese neue physikalische Größe besitzt die Einheit *Newtonmeter*<sup>22</sup>:

$$[M] = 1Nm = \frac{kg \ m^2}{s^2}$$

1 *Newtonmeter* ist das Drehmoment, das entsteht, wenn die Kraft 1N an einem 1m langen Kraftarm wirkt und die Vektoren von Kraft und Kraftarm aufeinander senkrecht stehen<sup>21</sup>. Das Drehmoment ist die Ursache einer beschleunigten Drehbewegung. Es ergibt sich eine direkte Abhängigkeit zwischen dem Drehmoment und dem Trägheitsmoment:

$$M = r \cdot F = r \cdot ma = r \cdot m \cdot r \cdot \alpha = mr^2 \cdot \alpha = J \cdot \alpha \quad (2.20)$$

<sup>20</sup>vgl: Quelle 3 S. 70: 1.4 Die gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung

<sup>21</sup>Quelle 2 S. 127f. 2.6.1 Das Drehmoment

<sup>22</sup>Quelle 2 S. 128. 2.6.1 Das Drehmoment und Quelle 12 S. 72: T1 Physikalische Größen

Greifen zwei Kräfte an einem um eine Achse drehbaren Körper an, so bleibt dieser in Ruhe, sofern die Produkte aus Kraft und senkrechtem Abstand zur Achse gleich sind.<sup>23</sup>

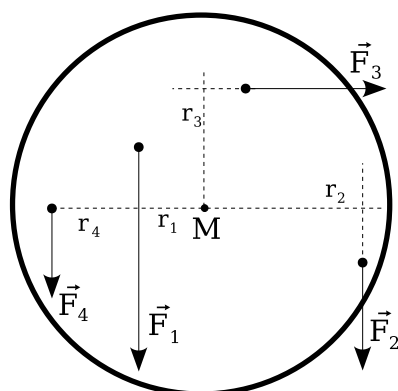


Abbildung 5: Skizze zur Veranschaulichung des Drehmoments an einem Rotationskörper

umgekehrt<sup>24</sup>.

$$F_1 \cdot r_1 + F_4 \cdot r_4 = F_2 \cdot r_2 + F_3 \cdot r_3$$

Die zur Drehung um einen Winkel  $\Delta\varphi$  nötige Energie lässt sich mit Hilfe von  $\Delta E = F \cdot \Delta s$  berechnen. Dabei gilt  $\Delta s = r \cdot \varphi$  und  $\sin \alpha = 1$ . Somit ergibt sich<sup>24</sup>:

$$\Delta E = F \cdot r \cdot \Delta\varphi = M \cdot \Delta\varphi \quad (2.21)$$

## 2.5 Der Drehimpuls und seine Erhaltung

Neben den bekannten Erhaltungssätzen der Masse und der Energie gibt es noch zwei weitere, nämlich:

- den Impulserhaltungssatz der Translationsbewegung und
- den **Drehimpulserhaltungssatz** der Rotation

<sup>23</sup>Quelle 6 S. 307: 10.2.1 Das Drehmoment

<sup>24</sup>Quelle 3 S. 70: 1.4.1 Die gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung

## Zum Impulserhaltungssatz

Jeder Körper mit der Masse  $m$ , der eine Translation mit einer Geschwindigkeit  $v$  erfährt, besitzt einen Impuls  $p$  aus<sup>25</sup>  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

Der Impulserhaltungssatz besagt nun, dass die Summe aller Einzelimpulse in einem abgeschlossenen System (d.h. keine Krafteinwirkung von außen) einen konstanten Wert ergibt<sup>26</sup>. Da dieser Satz nur bei einer Translation zum Tragen kommt muss, also eine weitere Regel für eine Rotation aufgestellt werden.

## Zum Drehimpulserhaltungssatz

Der Drehimpuls, auch Drall oder Wucht genannt, bildet sich aus dem Trägheitsmoment  $J$  (siehe Formel 2.11) und der Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  (siehe dazu Formel 2.2) und wird mit  $L$  bezeichnet<sup>27</sup>:

$$L = J \cdot \omega \quad (2.22)$$
$$[L] = kg \cdot \frac{m^2}{s} = Nms = Js$$

Der Drehimpulserhaltungssatz besagt<sup>28</sup>:

*Der Gesamtdrehimpuls eines starren Körpers ist innerhalb eines geschlossenen Systems konstant:*

$$L = J \omega = const. \quad (2.23)$$

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses wird durch einen äußeren Drehmoment bewirkt:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = J \cdot \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = J \cdot \alpha = M \quad (2.24)$$

---

<sup>25</sup>Quelle: 12 S. 15: M5 Erhaltungssätze; Formel 5.2.2 Impuls  $\vec{p}$  Definition

<sup>26</sup>Quelle 6 S. 319: 10.3 Der Drehimpuls

<sup>27</sup>Quelle 12 S. 33: M12 Drehbewegung eines starren Körpers

<sup>28</sup>Quelle 6 S. 320: 10.3 Der Drehimpuls

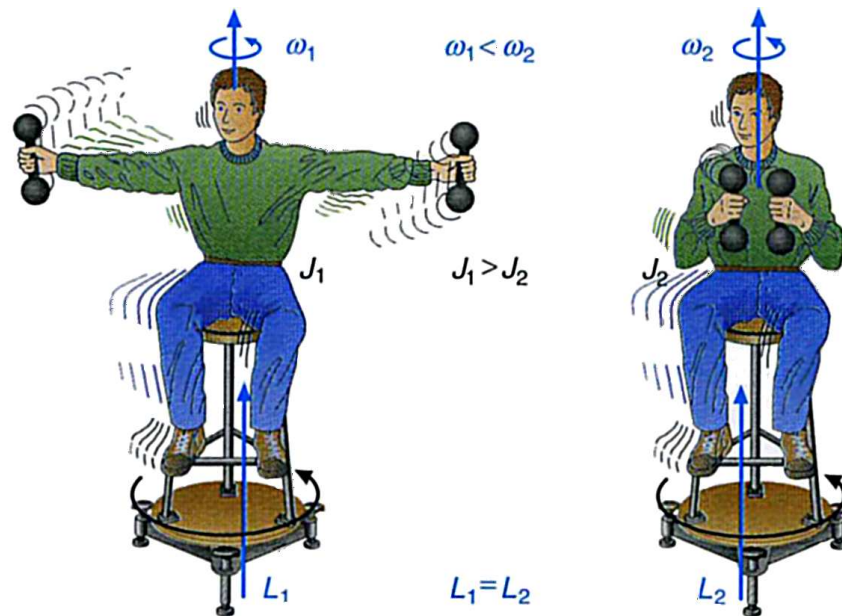


Abbildung 6: Darstellung des Drehimpulserhaltungssatzes

Ein Experiment wie in Abbildung 6 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und dem Trägheitsmoment  $J$ . Durch das Heranziehen der Hanteln wird nach Formel 2.19 das Trägheitsmoment verringert. Da jedoch mangels äußerer Drehmomente der Gesamtimpuls  $L$  konstant bleiben muss, erhöht sich die Winkelgeschwindigkeit<sup>29</sup>. Ähnliches Verhalten wird auch bei einer Pirouette im Eiskunstlauf deutlich<sup>30</sup>.

## 2.6 Direkter Vergleich zwischen Translation und Rotation

Zusammenfassend die wichtigsten Merkmale der Translation und der Rotation im direkten Vergleich<sup>31</sup>:

<sup>29</sup>Quelle 3 S. 74: 1.4.3 Der Drehmoment und seine Erhaltung

<sup>30</sup>Quelle: 6 S. 321: 10.3 Der Drehimpuls

<sup>31</sup>Quelle 2 S. 143: 2.6.7 Die Analogien zwischen der Translations- und der Rotationsbewegung

<i>Translation</i>		<i>Rotation</i>	
Weg	$s$	Drehwinkel	$\varphi$
Geschwindigkeit	$v = \frac{ds}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$
Masse	$m$	Trägheitsmoment der Drehachse	$J = \int r^2 dm$
Kraft	$F = m \cdot a$	Drehmoment	$M = J \cdot \alpha$
Arbeit	$W = \int F ds$	Arbeit	$W = \int M d\varphi$
Leistung	$P = \frac{dW}{dt} = F \cdot v$	Leistung	$P = \frac{dW}{dt} = M \cdot \omega$
Translationsenergie	$W_{Trans} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	Rotationsenergie	$W_{Rot} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$
Impuls	$p = m \cdot v$	Drehimpuls / Drall	$L = J \cdot \omega$
Gleichförmige Translation	$s = v \cdot t$	Gleichmäßige Kreisbewegung	$\varphi = \omega \cdot t$
Gleichmäßig beschleunigte Translationsbewegung	$v_1 = v_0 + a \cdot t_1;$ $s_1 = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$	Gleichmäßig beschleunigte Rotationsbewegung	$\omega_1 = \omega_0 + \alpha \cdot t_1;$ $\varphi_1 = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$

### 3 Der symmetrische Kreisel

Im folgenden Kapitel sollen die bisher erarbeiteten Grundlagen der Drehbewegung auf den speziellen Fall des Kreisels angewendet werden. Dazu wird zunächst definiert, was man unter einem Kreisel, insbesondere einem symmetrischen Kreisel versteht und anschließend zwei grundlegende Typen, der kräftefreie und der schwere Kreisel besprochen. Auf die Besonderheiten der sog. *Schnellen Kreisel* kann in dieser Arbeit aus Platzgründen nicht eingegangen werden. Detaillierte Informationen zum schnellen Kreisel bietet Dr. Grammel der Hochschule Stuttgart in seiner Buch über die Kreiselp Physik<sup>32</sup>.

<sup>32</sup>Quelle 8 S. 72: 6.3 Schnelle Kreisel

### 3.1 Definition eines symmetrischen Kreisels

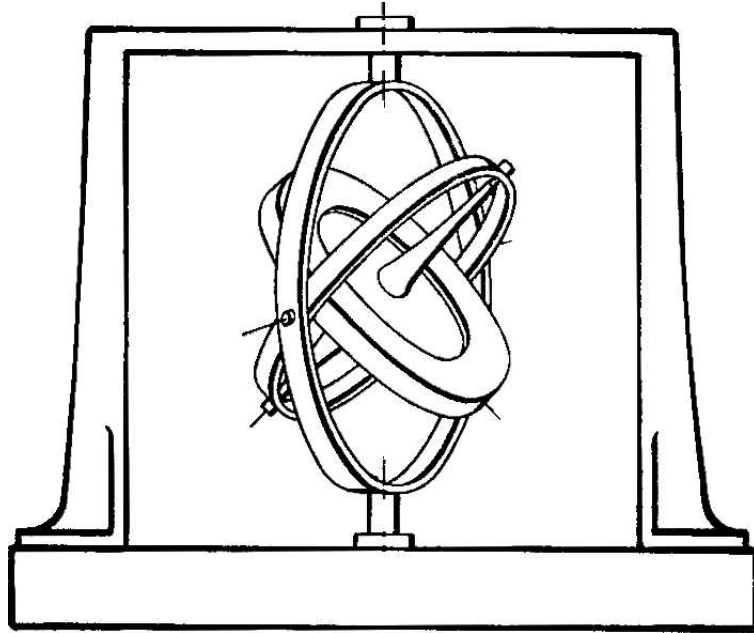


Abbildung 7: Kreisel in Cardangehänge

*Unter einem Kreisel versteht man einen starren, rotierenden Körper, der entweder ganz frei beweglich ist, oder der bei völliger Drehfreiheit nur in einem Punkte festgehalten wird<sup>33</sup>.*

Man muss jedoch prinzipiell zwischen zwei Arten von Kreiseln unterscheiden. Es gibt einerseits den *symmetrischen* Kreisel (siehe Abbildung 7), auf den sich diese Arbeit spezialisiert und andererseits einen *asymmetrischen* Kreisel, der auf Grund von wesentlich komplizierteren Abläufen bei der Rotation nicht weiter besprochen werden kann.

*Unter einem symmetrischen Kreisel versteht man einen starren, homogenen und rotationssymmetrischen Körper. Die Symmetrieachse wird als Figurenachse bezeichnet und geht durch den Schwerpunkt des Kreisels<sup>34</sup>.*

---

<sup>33</sup>zitiert von Quelle 2 S. 139: 2.6.6 Der Kreisel

<sup>34</sup>Quelle 2 S. 140: 2.6.6 Der Kreisel

## 3.2 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

### 3.2.1 Definition des kräftefreien Kreisels

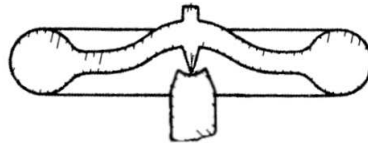


Abbildung 8: Kräftefreier symmetrischer Kreisel

All jene symmetrischen Kreisel, bei denen der Schwerpunkt auf den Stützpunkt des Kreisels fällt, werden als *kräftefreie symmetrische Kreisel* bezeichnet (siehe dazu Abbildung 8). Er wird deshalb so genannt, da sich Stützkraft und Schwerkraft aufheben und somit keine Kraft von außen auf ihn wirkt. Natürlich gilt es etwaige Reibungskräfte zu vernachlässigen<sup>35</sup>. Ein jeder Körper besitzt nun drei Hauptachsen.

*Unter einer Hauptträgheitsachse eines starren Körpers versteht man die beiden durch den Schwerpunkt gehenden, zueinander senkrechten Achsen, für die das Trägheitsmoment des Körpers ein Maximum bzw. ein Minimum ist, sowie eine dritte zu den beiden senkrechte Achse, für die das Trägheitsmoment einen mittleren Wert hat<sup>36</sup>.*

Ein Kreisel wird als schlafend bezeichnet, wenn er keine weitere Bewegung neben der Eigenrotation der Hauptachse beschreibt. Er dreht sich dann aufrechtstehend so ruhig, dass man ihm die Bewegung nicht ansieht. Warum ein solcher Kreisel auch von selbst zu schlafen beginnt kann in Schlinings Arbeit über Kreiselphänomene<sup>37</sup> 10 nachgelesen werden. Dort gibt es auch Informationen über all jene Kreisel, die in ihrem Stützpunkt nicht fixiert, also frei beweglich sind.

### 3.2.2 Unabhängigkeit der Drehbewegung

Wie bereits in Kapitel 2.5 festgestellt, ist der Gesamtdrehimpuls innerhalb eines geschlossenen Systems immer konstant.

<sup>35</sup>vgl Quelle 8 S. 49f: Der symmetrische Kreisel

<sup>36</sup>zitiert aus Quelle 2 S. 133: Die Drehbewegung

<sup>37</sup>Quelle 10 S. 14: 5 Wenn der Kreisel schläft...

Ein Impuls auf den Stützpunkt würde den Kreisel lediglich zu einer Translation in die Stoßrichtung bewegen, hätte aber keinerlei Einfluss auf die Rotation des Körpers<sup>38</sup>. Solange ein Impuls keinen Einfluss auf die Achse des Kreisels hat, sind die Rotation des Kreisels und die Translation des Stützpunktes von einander unabhängig.

### 3.2.3 Die Stabilität der permanenten Achsen

Das Besondere an einem kräftefreien Kreisel ist, dass er sich auf seinen Hauptachsen stabil halten kann. Das liegt am Drehimpulserhaltungssatz. Zur Verdeutlichung dieser Stabilität könnte man in einem Experiment versuchen die Achse eines, sich sehr schnell drehenden, Kreisels zu kippen. Man wird feststellen, dass der Kreisel mit einer Gegenkraft versucht der Änderung der Drehachse entgegen zu wirken. Er versucht seine stabile Drehachse beizubehalten.

Betrachten wir nun einmal einen einzelnen Massenpunkt. Auf jedes Teilchen wirken Zentrifugal- und Zentripetalkraft, erstere versucht das Teilchen aus seiner Bahn heraus zu schleudern, die andere hält das Teilchen in seiner Kreisbahn. Würde man die Verbindung zwischen dem Teilchen und der rotierenden Achse entfernen würde es sich tangential, also in einer geradlinigen Bewegung vom Kreisel entfernen.

*Die Figurenachse eines rotierenden, kräftefreien Kreisels behält bei ruhendem Unterstützungspunkt ihre Lage im Raum und bei einer Bewegung des Unterstützungspunkt ihre Richtung um Raum bei<sup>39</sup>.*

Jede Richtungsänderung der Rotationsachse führt zu einer Richtungsänderung der einzelnen Teilchen. Der Kreisel stabilisiert sich sozusagen von selbst. Das Drehmoment, das aufzuwenden ist um die Achse zu kippen, ist also umso größer, je schneller sich der Kreisel dreht.<sup>40</sup>

Dieses Prinzip wird auch bei Geschossen, zB. bei einem Gewehr verwendet. Eine Führungsrille im Lauf verleiht der Kugel einen Geschossdrall, der parallel zur Flugrichtung liegt. Das bedeutet, dass die Drehbewegung der Kugel jeder von außen wir-

---

<sup>38</sup>vgl: Quelle 8 S. 50: 4 Der kräftefreie symmetrische Kreisel

<sup>39</sup>zitiert aus Quelle 2 S. 142: 2.6.6 Der Kreisel

<sup>40</sup>vgl: Quelle 10 S. 13: 2 Achsenstabilität

kenden Kraft, etwa dem Wind entgegenwirkt und das Projektil so die Richtung beibehält<sup>41</sup>.

### 3.2.4 Die Nutation des kräftefreien Kreisels

Wir müssen nun klar unterscheiden zwischen der *Drehimpulsachse*, der *Drehachse* und der *Figurenachse*.

Erteilt man einem rotierenden Kreisel nun einen Stoß senkrecht zur Achse, wodurch nach Formel 2.18 ein weiteres Drehmoment entsteht, so fallen Drehachse, Drehimpulsachse und Figurenachse nicht mehr zusammen. Der Kreisel dreht sich sozusagen nicht mehr um seine eigene Symmetrieachse und beginnt zu *schlingern*. Eine solche Bewegung wird als Nutation<sup>42</sup> bezeichnet.

Die Figurenachse beschreibt nun den sogenannte *Nutationkegel*<sup>43</sup> (siehe Abbildung 10).

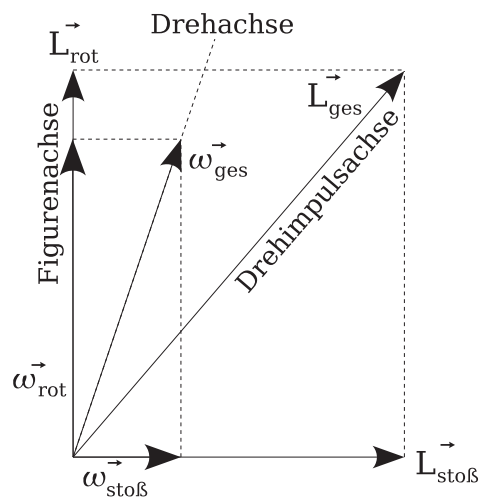


Abbildung 9: Grafik zur Veranschaulichung des Drehimpulserhaltungssatzes bei der Nutation

Ursache für die Ausweichbewegung ist der Drehimpulserhaltungssatz. Der zusätzliche Drehimpuls, verursacht durch den Stoß, sorgt für einen Gesamtdrehimpuls  $\vec{L}_{ges} = \vec{L}_{rot} + \vec{L}_{stoß}$ , der nach Betrag und Richtung gleich bleiben muss. Die Drehimpulsachse

<sup>41</sup>Quelle 2 S. 142: 2.6.6 Der Kreisel

<sup>42</sup>von „nutare“ (lat.) = nicken, schwanken; teilweise auch **reguläre** oder **kräftefreie Präzession** genannt

<sup>43</sup>vgl: Quelle 8 S. 76: 4. Die pseudoreguläre Präzession

$\vec{L}_{rot}$  und die Drehachse  $\vec{\omega}_{rot}$  fallen mit der Figurenachse zusammenfallen. Weiter liegen auch die durch den Stoß entstanden Drehimpulsachse  $\vec{L}_{stoß}$  und Drehachse  $\vec{\omega}_{stoß}$  aufeinander. Die Verschiedenheit der senkrecht zueinander stehenden Hauptträgheitsmomente ( $J_{rot}$  ist minimal und  $J_{stoß}$  maximal) ergibt, nach der Formel  $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ , für die Winkelgeschwindigkeiten ein großes  $\vec{\omega}_{rot}$  und ein kleines  $\vec{\omega}_{stoß}$ . Abbildung 9 zeigt nun, dass die vektorielle Summe beider Drehachsen und Drehimpulsachsen keinesfalls mehr zusammenfallen<sup>44</sup>.

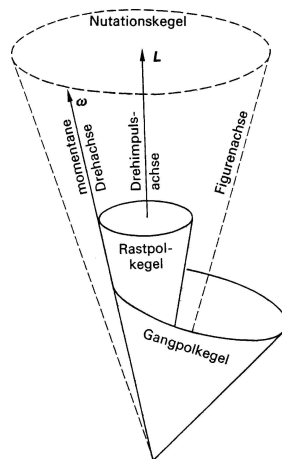


Abbildung 10: Figurenachse, Drehachse und Drehimpulsachse fallen nicht aufeinander. Es entsteht der Nutationskegel

Das bedeutet, dass die Figurenachse einen Kegel, den sog. Nutationskegel, und die Drehachse den sog. Rastpolkegel beschreibt. Die Drehimpulsachse ist, nach dem Drehimpulserhaltungssatz, ortsfest. Bildlich gesprochen dreht sich die Figurenachse um die Drehachse und diese wiederum rotiert um die ortsfeste Drehimpulsachse. Abbildung 10 zeigt den Nutationskegel und den Rastpolkegel. Zur Veranschaulichung kann man sich einen Kegel vorstellen, dessen Innenseite um den Rastpolkegel rotiert. Die

Achse dieses sog. Gangpolkegels beschreibt den Weg der Figurenachse bei einer Nutation.

Die Winkelgeschwindigkeit, mit der der Kegel um die Drehimpulsachse nutiert lässt errechnen<sup>45</sup>:

$$\omega_{nut} = \frac{L}{J_{\ddot{A}}} \quad (3.1)$$

$J_{\ddot{A}}$  ist dabei das Trägheitsmoment des Kreisels um seine äquatoriale Hauptachse.

<sup>44</sup>persönliche Mitteilung von Doktor Hammer - physikalisches Institut Erlangen

<sup>45</sup>Quelle 15 S.3: 3.2 Die Nutation (kräftefreier Kreisel)

### 3.3 Der schwere Kreisel

#### 3.3.1 Definition des schweren Kreisels

Bei den bisherigen Kreiseln ist der Schwerpunkt mit dem Stützpunkt zusammengefallen. Bei einem schweren Kreisel ist das anders. Hier lagert man den Kreisel bewusst ausserhalb des Schwerpunkts und sorgt dafür, dass sich Schwerkraft und Stützkraft nicht mehr gegenseitig aufheben (siehe Abbildung 11). Das hat nun zur Folge, dass die Schwerkraft ein ständiges Drehmoment auf den Kreisel ausübt. Das Ergebnis ist eine **Präzession**.

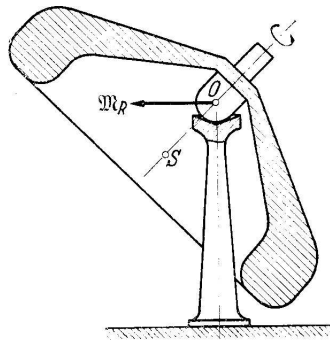


Abbildung 11: Der Schwerpunkt liegt ausserhalb des Stützpunktes. Somit handelt es sich um einen schweren Kreisel

#### 3.3.2 Präzession eines schweren Kreisels

Zur Durchführung einer Präzession verwenden wir einen kräftefreien symmetrischen Kreisel in seiner Eigendrehung und machen aus ihm einen nichtkräftefreien, also schweren Kreisel. Dies tun wir zum Beispiel durch ein zusätzliches Gewichtstück und verschieben damit den Schwerpunkt weg vom Stützpunkt des Kreisels. Es ergibt sich somit auf Grund der Schwerkraft ein weiteres Drehmoment, das den Kreisel zu kippen versucht. Der Kreisel stürzt von seiner stabilen vertikalen Achse und vollführt eine zusätzliche Kreisbewegung<sup>46</sup>.

Hier gilt nun, dass die Schwerkraft ein weiteres Drehmoment ausübt (Abb. 12). Dieses Drehmoment  $\vec{M}_p$ , steht senkrecht auf  $\vec{F}_G$  und  $\vec{r}$ . Nach Gleichung 2.24 liefert

<sup>46</sup>Quelle 14 Universität Stuttgart - Rotation freier Achsen; Kreisel

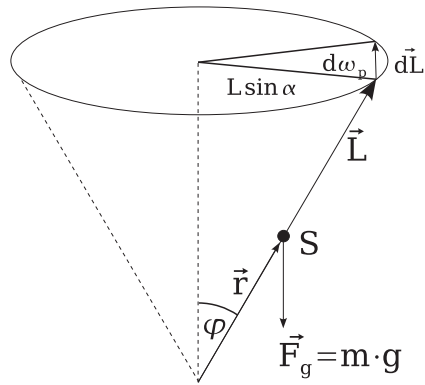


Abbildung 12: Skizze einer Darstellung der Präzession

die zeitliche Änderung des Drehmoments  $\vec{M}_p$  eine Drehimpulsänderung  $\frac{d\vec{L}_p}{dt}$ . Diese Drehimpulsänderung addiert sich nun zum vorhandenen Drehimpuls  $\vec{L}$  hinzu. Da das Drehmoment  $\vec{M}_p$  zu jedem Zeitpunkt senkrecht zum Drehimpuls  $\vec{L}$  steht hat eine solche Drehimpulsänderung zur Folge, dass die Richtung von  $\vec{L}$  immer verschieden ist. Die Figurenachse weicht aus. Dabei schliessen  $J\vec{\omega}$  und  $J\vec{\omega}_p$  einen Winkel  $\Delta\varphi$  ein<sup>47</sup>.

Für den Gesamtdrehimpuls ergibt sich<sup>48</sup>:

$$L_{ges} = \vec{L} + \vec{L}_p = J \cdot \vec{\omega} + \int \vec{M}_G dt \quad (3.2)$$

Wir stellen fest: Eine Präzession ist die **direkte** Folge der Schwerkraft<sup>49</sup>.

Die zusätzliche Energie die nötig ist, um die Präzessionsbewegung zu vollziehen wird dadurch aufgebracht, dass der Kreisel den Präzessionswinkel  $\varphi$  vergrößert und dadurch potentielle Energie zur Verfügung stellt<sup>49</sup>.

Nach einer gewissen Zeit jedoch vergrößert sich der Winkel zwischen Kreiselachse und vertikaler mehr und mehr, bis er letztendlich auf dem Grund aufsetzt oder sich aus der Verankerung löst. Dieser Effekt ist durch den Energieverlust durch Reibung zu erklären, der durch die Vergrößerung des Winkels kompensiert werden muss. Bei absoluter Reibungsfreiheit würde sich an der Rotations- und der Präzessionsbewegung nichts mehr ändern<sup>50</sup>.

<sup>47</sup>persönliche Mitteilung von Doktor Hammer - physikalisches Institut Erlangen

<sup>48</sup>siehe Quelle 5 S.189: 6.3.8 Der Kreisel

<sup>49</sup>Quelle 10 S. 14: 4 Präzession

<sup>50</sup>Quelle 10 S. 14: 4 Präzession

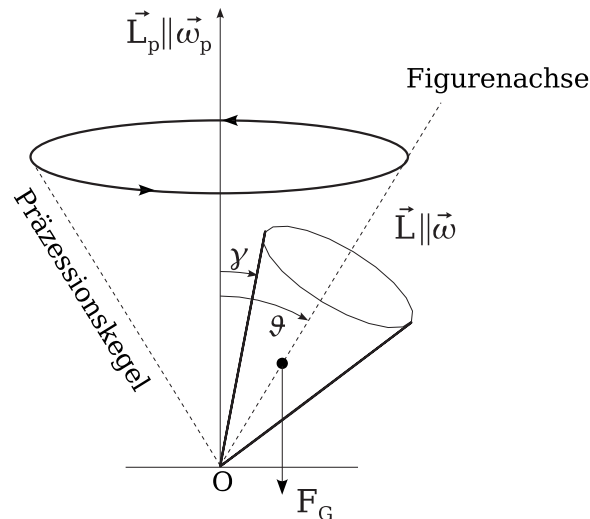


Abbildung 13: Skizze eines Präzessionskegel um die Präzessionsachse

Für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{pr}$  gilt<sup>51</sup>:

$$\omega_{pr} = \frac{M}{L \cdot \sin \varphi} = \frac{rF}{L \cdot \sin \varphi} \quad (3.3)$$

### 3.3.3 Das Kreiselmoment $M_K$

Wir wissen nun bereits, wie eine Präzession aussieht, jedoch wissen wir nicht, wie der Kreisel die Präzessionsbewegung angesichts der wirkenden Schwerkraft aufrechterhält. Dem Drehmoment  $M$ , den das Schwerkraftfeld verursacht, wirkt das Kreiselmoment  $M_K$  als Reaktionsmoment entgegen. Wir wissen, dass das Drehmoment senkrecht auf die Drehachse des Kreisels und senkrecht auf die Drehachse der Präzession wirkt. Zusätzlich haben wir nun ein Kreiseldrehmoment, das gegen dieses Drehmoment wirkt. Es ergeben sich sozusagen zwei Rechtssysteme<sup>52</sup>(siehe Abbildung 14).

Für den Fall, dass zwischen den Vektoren  $\vec{\omega}$  und  $\vec{\omega}_p$  der Winkel  $\varphi \neq 90^\circ$  ist, gilt folgende Beziehung<sup>53</sup>:

$$M_K = J \cdot \omega \cdot \omega_p \cdot \sin \varphi \quad (3.4)$$

Da sich die Kippbewegung des Kreisel nach kurzer Zeit verringert und der Kreisel in

<sup>51</sup>Quelle 15 Universität Hannover

<sup>52</sup>Quelle 5 S. 191: 6.3.8 Der Kreisel

<sup>53</sup>Satz und Formel zitiert aus Quelle 5 S. 191: 6.3.8 Der Kreisel

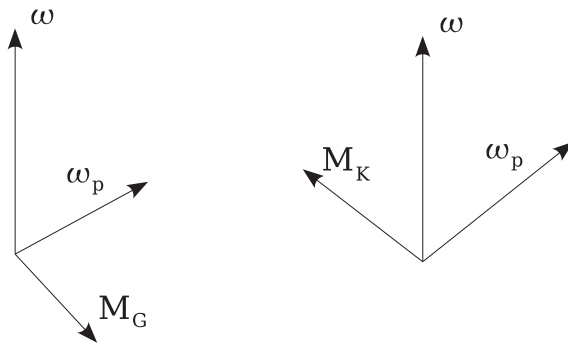


Abbildung 14: Das zusätzliche Drehmoment und das entgegenwirkende Kreiselmoment

eine Präzessionsbewegung übergeht, ist das Kreiselmoment  $M_K$  nun betragsmäßig identisch mit dem Drehmoment  $M_G$ , das die Schwerkraft verursacht. Die Kräfte, die am Schwerpunkt angreifen, sind jetzt im Gleichgewicht und die Präzessionsbewegung unbeschleunigt.

### 3.3.4 Der besondere Fall mit $\varphi = 90^\circ$

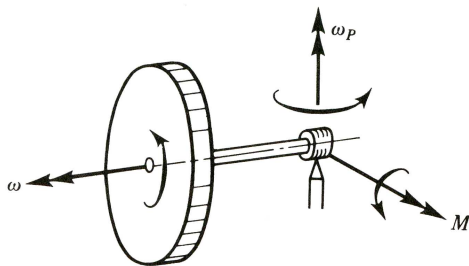


Abbildung 15: „Kreiselachse  $\omega$  jagt Momentenachse  $M$ “

Etwas ganz Besonderes ist der Fall wenn die Rotationsachse mit der Vertikalen einen Winkel von  $\varphi = 90^\circ$  einschließt. Auch hier kann sich der Kreisel - sofern man eine geeignete Apparatur dafür verwendet, da er sonst mit dem Boden kollidiert - von selbst halten (von etwaigen Reibungskräften wird abgesehen). Die Figurenachse beschreibt nun einen Kreisbogen und muss deshalb mit maximaler

Geschwindigkeit um den Stützpunkt kreisen. Daher wird diese Form der Rotation als labilste bezeichnet<sup>54</sup>.

Bruno Assmann bringt diese Form der Bewegung auf die kurze Formel<sup>55</sup>:

„Kreiselachse jagt Momentenachse“

<sup>54</sup>vgl: Quelle 8 S. 56f: 3. Die Stabilität der permanenten Achsen

<sup>55</sup>zitiert aus Quelle 5 S. 190: 6.3.8 Der Kreisel

### 3.4 Die pseudoreguläre Präzession

Die pseudoreguläre Präzession ist grundlegend ähnlich der Präzession, nur mit einer Nutation als Begleiterscheinung. Fällt der Radius des Nutationskegels sehr klein aus, so ist eine pseudoreguläre Präzession kaum zu erkennen.

Die Figurenachse des Kreisels rotiert somit doppelt, einmal als Präzession um die Vertikale und ein weiteres mal um die Drehachse, die eben nicht mehr die Figurenachse des Kreisels ist (Abbildung 16).

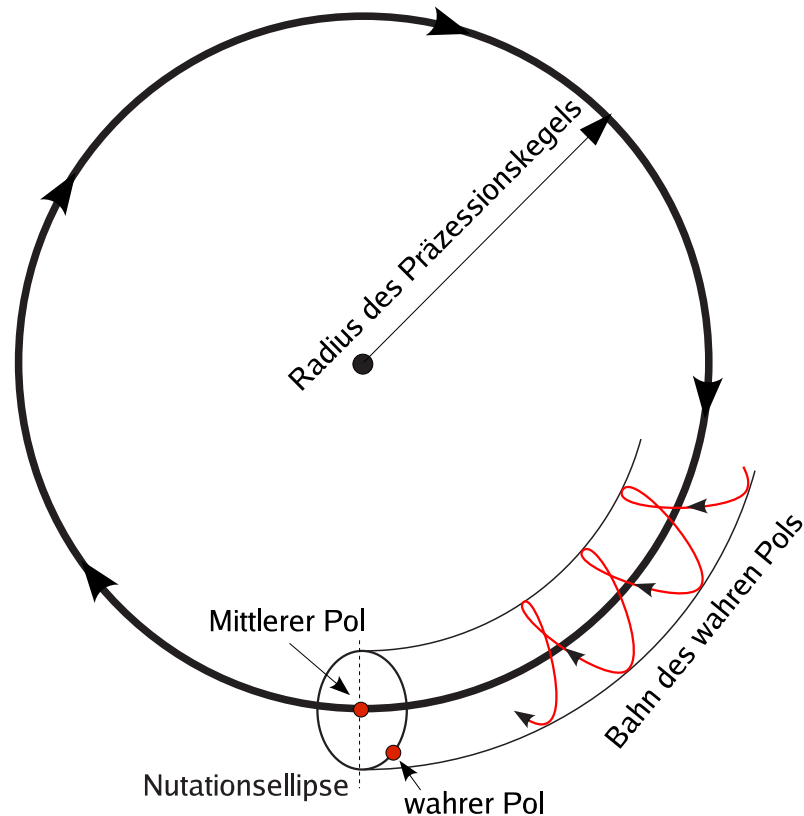


Abbildung 16: Bewegung der Figurenachse bei einer pseudoregulären Präzession

*Man nennt diese Kreisbewegung, die trotz ihres einfachen Aussehens ziemlich verwickelt ist, eine pseudoreguläre Präzession. Man könnte die Erzitterungen der Figurenachse als Präzession zweiter Ordnung bezeichnen und benennt sie gewöhnlich mit dem der Astronomie entnommenen Wort Nutationen. Den Präzessionskegel zweiter Ordnung nennt man dann*

Nutationskegel<sup>56</sup>.

Der *mittlere Pol* aus Abbildung 16 beschreibt die Bewegung auf dem Präzessionskegels, während der *wahre Pol* die Position der Figurenachse zeigt.

Die Anzahl der Nutationen pro Präzessionsdurchlauf errechnet sich aus<sup>57</sup>:

$$n = \frac{\omega_{nut}}{\omega_{pr}} = \frac{\frac{M}{L \sin \alpha}}{\frac{L}{J_D}} \quad (3.5)$$

## 4 Anwendungsgebiete der Kreiselphysik

In vielen verschiedenen Bereichen gibt es Verwendung für die physikalischen Eigenschaften von Kreiseln. So zum Beispiel als Kompass oder künstlicher Horizont in Flugzeugen oder als Trainingswerkzeug. Dieses Kapitel behandelt kurz und sehr eingeschränkt die Einsatzmöglichkeiten des Kreisel.

### 4.1 Der Kreiselkompass

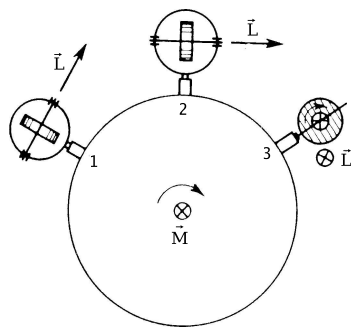


Abbildung 17: Ein Kreiselkompass auf dem Äquator der Erde

Eines der wichtigsten Instrumente im Cockpit eines Flugzeuges ist der Kompass. Jedoch arbeitet dieser nicht wie ein gewöhnlicher Kompass mit einer freibeweglich gelagerten magnetischen Nadel, sondern mit einem symmetrischen Kreisel. Der sogenannte Kreiselkompass nutzt nun die Drehbewegung der Erde aus um sich auszurichten.

In Abbildung 17 ist ein Kreisel in **1** so auf dem Äquator gelagert, dass er sich mit seinem Drehimpuls  $\vec{L}$  tangential zur Erdbewegung dreht. Dreht die Erde den Kreisel von Position **1** nach Position **2**, so muss die Drehachse gekippt werden. Das dazu notwendige Drehmoment  $\vec{M}$  verursacht eine Präzession. Dieses Drehmoment existiert solange, wie  $\vec{L}$  einen Teildrehimpuls in Richtung der Erddrehbewegung besitzt. Erst wenn die Rotationsachse und somit die Drehimpulsachse senkrecht zur Drehbewegung der Er-

<sup>56</sup>vgl: Quelle 8 S. 76: 4. Die pseudoreguläre Präzession

<sup>57</sup>Quelle 8 S. 77: 4. Die pseudoreguläre Präzession und Quelle 15 - Universität Hannover

de steht (Position 3), kann der Kreisel ohne Präzessionsbewegung parallel verschoben werden. Ein Kreisel richtet sich also automatisch nach Norden aus.

## 4.2 Präzessionsbewegung der Erde

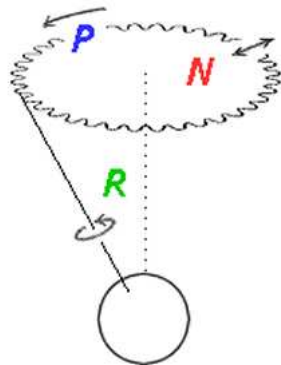


Abbildung 18: Die pseudoreguläre Präzession der Erde

Auch die Erde besitzt eine Präzessionsbewegung. Um genau zu sein handelt es sich sogar um eine pseudoreguläre Präzession, also eine Überlagerung von Präzession und Nutation. Dies liegt daran, dass die Erde keine exakte Kugelform besitzt. Es gibt eine „Äquatorwulst“ von 21 km Höhe. Auf diese Erhebung wirkt nun ein Drehmoment, verursacht durch die Gezeitenkräfte von Mond und Sonne. Für eine vollständige Umrundung

der Präzessionsbewegung erster Ordnung benötigt die Erde ein platonisches Jahr. Das sind etwa 25.800 Jahre. Die Nickbewegung der Präzession (die Nutation) wird dadurch verursacht, dass der Mond selbst auch einer Präzessionsbewegung unterworfen ist. Begründet durch die 5°-Neigung und den wechselnden Knotenlagen hat es zur Folge, dass die Präzessionsbewegung eine Nutationsbewegung von 20'' erhält<sup>58</sup>.

## 5 Schlusswort

Abschliessend möchte ich darauf hinweisen, dass die Rotation der Erde keineswegs unantastbar bleibt. Selbst die große Masse der Erdkugel macht es nicht unmöglich durch Krafteinfluss die Rotationsachse zu verschieben. Gezeigt hat das unter anderem das verheerende Erdbeben in Südostasien am Ende des Jahres 2004.

Erdrotation und Erdachse wurden beide von der Wucht des Bebens beeinflusst. Messungen des *International GPS Services* an der Universität Bern ergaben, dass sich nach dieser Katastrophe die Position der Erdachse um acht Zentimeter von ihrer Sollposition unterscheidet. Dies ist nach Angaben der Berner Wissenschaftler die größte Abweichung der Rotationsachse seit Beginn der GPS-Überwachung 1992, die auf ein

<sup>58</sup>Quelle 19 Wikipedia - Die freie Enzyklopädie - Präzession

einzelnes Ereignis zurückgeführt werden kann<sup>59</sup>.

Jedoch ist das nicht besonders besorgniserregend, da die Präzessionsbewegung der Erde mit etwa 10 Metern verhältnismäßig groß ist und ein Beben somit keinen großen Einfluss hat. Allerdings könnte es durch eine minimal erhöhte Rotationsgeschwindigkeit zu einer Verkürzung der Tageslänge kommen. Dabei handelt es sich rein rechnerisch nur um einen Betrag von etwa drei Mikrosekunden<sup>60</sup>.

---

<sup>59</sup>Quelle 20 - Spektrum direct

<sup>60</sup>Quelle 21 - Fürther Nachrichten vom 31.Dezember 2004 auf Seite 6

## 6 Anhang

### 6.1 Literaturnachweis

1. Dr. Hans Schmiedel und Dr. Johannes Süß: PHYSIK für technische Berufe, 18. Auflage 1968, Verlag Handwerk und Technik Dr. Felix Büchner
2. Oskar Höfling: Physik, Lehrbuch für den Unterricht und Selbststudium, 11. Auflage, Verlag Dümmler 1976
3. Joachim Grehn (Hrsg.) und Joachim Krause (Hrsg): Metzler Physik, 3. Auflage, Schroedelverlag, Hannover 2004
4. Friedhelm Kuypers(Hrsg.): Physik für Ingenieure, Band 1: Mechanik und Thermodynamik, Verlag VCH, Weinheim 1996
5. B. Assmann: Technische Mechanik, Band3: Kinematik und Kinetik, 9. Auflage, R. Oldenburg Verlag München Wien 1990
6. Hermann-Rottmair Zettl: Physik Mechanik, 3. Auflage 1999, R. Oldenburg Verlag München
7. Zirpke und Kummer: Technische Mechanik 1965 Leipzig; Technik-Tabellen-Verlag Fikentschert & Co Darmstadt
8. Dr. R. Grammel: Der Kreisel - Seine Theorie und seine Anwendungen, 1. Band: Die Theorie des Kreisels, 2. Auflage, Springer Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950
9. Dr. R. Grammel: Der Kreisel - Seine Theorie und seine Anwendungen, 2. Band: Die Anwendungen des Kreisels, 2. Auflage, Springer Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950
10. H.J Schlichting: Kreiselphänomene
11. Barth, Mühlbauer, Nikol, Wörle: Mathematische Formeln und Definitionen; 7. Auflage 1998, J. Lindauer Verlag München
12. Hammer/Hammer; Physikalische Formeln und Tabellen; 8. Auflage 2002, J. Lindauer Verlag (Schaefer) München
13. Staatsexamen von David Himmel  
*<http://ap.physik.uni-konstanz.de/Literatur/mirror/Kreisel/>*
14. Internetadresse der Universität Stuttgart:  
*<http://www.pi1.physik.uni-stuttgart.de/Vorlesungsversuche/V243.html>*
15. Internetadresse der Universität Hannover:  
*<http://www.iqo.uni-hannover.de/ap/versuche/A04.pdf>*

16. Wikipedia - Die freie Enzyklopädie  
*<http://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Axiome>*
17. Wikipedia - Die freie Enzyklopädie  
*<http://de.wikipedia.org/wiki/Trägheitsmoment>*
18. Wikipedia - Die freie Enzyklopädie  
*<http://de.wikipedia.org/wiki/Steiner-Regel>*
19. Wikipedia - Die freie Enzyklopädie  
*<http://de.wikipedia.org/wiki/Präzession>*
20. *<http://www.wissenschaft-online.de/abo/ticker/769709>*
21. Fürther Nachrichten vom Freitag den 31. Dezember 2004

## 6.2 Quellen der Bilder

### Abb. Quelle und Anwendung

- 1 Handgezeichnet mit OpenOffice.org (OOo)
- 2 Handgezeichnet mit OOo
- 3 Handgezeichnet mit OOo
- 4 Handgezeichnet mit OOo
- 5 Handgezeichnet mit OOo
- 6 Bildbearbeitung (TheGimp) aus Metler S. 74
- 7 Bildbearbeitung (TheGimp) aus Quelle 8 S. 50 Abbildung 46.
- 8 Bildbearbeitung (TheGimp) aus Quelle 8 S. 50 Abbildung 45.
- 9 Handgezeichnet mit OOo
- 10 Handgezeichnet mit OOo
- 11 Bildbearbeitung (TheGimp) aus Quelle 8 S. 115 Abbildung 77
- 12 Handgezeichnet mit OOo
- 13 Handgezeichnet mit OOo
- 14 Handgezeichnet mit OOo
- 15 Bildbearbeitung (TheGimp) aus Quelle 5 S. 190 Abbildung 6-65
- 16 Handgezeichnet mit OOo
- 17 Zeichnung (TheGimp) nach Quelle 2 S. 144 Abbildung 144.3
- 18 Bildbearbeitung (TheGimp) aus Quelle 19: Wikipedia - Präzession

## 6.3 Inhalt der beiliegenden CD-ROM

Verzeichnis	Erläuterung
↪ <i>Bilder</i>	Alle verwendeten Grafiken
↪ <i>Facharbeit.dvi</i>	Diese Arbeit im 'device independent' Format
↪ <i>Facharbeit.ps</i>	Postskriptformat dieser Facharbeit
↪ <i>Facharbeit.pdf</i>	Eine, ins <i>Adobe™PDF Format</i> , konvertierte Fassung
↪ <i>Facharbeit.tex</i>	Die $\LaTeX$ -Quelldateien der Facharbeit
↪ <i>Quellen aus dem Internet</i>	Kopien aller verwendeten Internetseiten

## 6.4 Erklärung und Einverständniserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Facharbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Veitsbronn, den 26. Januar 2005

---

Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn diese Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit zugänglich gemacht wird.

Veitsbronn, den 26. Januar 2005

---

LaTeX